**Авторы документа: Черкасов Владислав, Ахметов Артём, Петрусова Екатерина, Гнусарёв Сергей. Отдельная благодарность Тиме Гринёву за замечания и помощь.**

# Задача №1

Для случайного процесса с независимыми и однородными по времени приращениями вычислить математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию.

**Решение:**
1. По определению процесса с однородными приращениями можем считать, что $X(0) \overset{\text{п. н.}}{=} 0$, следовательно, $X(t)$ — процесс Леви. Тогда для $h > 0$:

$$\mathbb{E}X(t+h) - \mathbb{E}X(t) = \mathbb{E}[X(t+h) - X(t)] = \mathbb{E}[X(h) - X(0)] = \mathbb{E}X(h) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathbb{E}X(t) + \mathbb{E}X(h) = \mathbb{E}X(t+h), \forall t \geq 0, h > 0$$

Получили функциональное уравнение Коши, имеющее единственное (нормальное) решение $\mathbb{E}X(t) = c \cdot t$. Тогда при $t = 1$:

$$\mathbb{E}X(1) = c \Rightarrow \mathbb{E}X(t) = t \cdot \mathbb{E}X(1);$$

2. Так как рассматриваемый процесс является процессом с независимыми приращениями, то $X(t), X(t+h) - X(t)$ — независимые величины, а значит:

$$\mathbb{D}X(t+h) = \mathbb{D}[X(t) + X(t+h) - X(t)] = \mathbb{D}X(t) + \mathbb{D}[X(t+h) - X(t)] = \mathbb{D}X(t) + \mathbb{D}X(h) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathbb{D}X(t) + \mathbb{D}X(h) = \mathbb{D}X(t+h)$$

Снова получили уравнение Коши, имеющее решение $\mathbb{D}X(t) = \tilde{c} \cdot t$. При $t = 1$ имеем:

$$\mathbb{D}X(1) = \tilde{c} \Rightarrow \mathbb{D}X(t) = t \cdot \mathbb{D}X(1);$$

3. $K(t,s) = cov(X(t), X(s)) = \mathbb{E}[X(t)X(s)] - \mathbb{E}X(t) \cdot \mathbb{E}X(s) = \{$не ограничивая общности,

считаем $t > s\} = cov(X(t) - X(s), X(s)) + cov(X(s), X(s)) = 0 + \mathbb{D}X(s)$

В случае $t < s$ аналогичным образом получим $K(t,s) = \mathbb{D}X(t)$. Таким образом, $K(t,s) = \mathbb{D}X[min(t,s)] = \mathbb{D}X(1) \cdot min(t,s)$.

# Задача №2

Случайный процесс $\xi(t) = A \cdot cos(\omega t + \phi)$, где $\omega$ – неслучайная константа, $A$ и $\phi$ независимы, $\mathbb{E}(A) = m$, $\mathbb{D}(A) = \sigma^2$, $\phi$ – равномерно распределена на отрезке $[0, 2\pi]$. вычислить математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию для $\xi(t)$. Доказать, что это стационарный в широком смысле случайный процесс.

**Решение:**
В силу независимости $A$ и $\phi$ получаем

$$\mathbb{E}(\xi(t)) = \mathbb{E}(A)\mathbb{E}(cos(\omega t + \phi)) = m \int_0^{2\pi} cos(\omega t + y)\frac{1}{2\pi}dy = 0$$

Далее

$$cov(\xi(t), \xi(s)) = \mathbb{E}(A \cdot cos(\omega t + \phi) \cdot A \cdot cos(\omega s + \phi)) = \mathbb{E}(A^2) \cdot \mathbb{E}(cos(\omega t + \phi) \cdot cos(\omega s + \phi)) =$$

$$= \{cos\alpha \cdot cos\beta = \frac{1}{2} \cdot (cos(\alpha - \beta) + cos(\alpha + \beta))\} = (\sigma^2 + m^2) \cdot \frac{1}{2} \cdot \mathbb{E}(cos(\omega(t-s)) + cos(\omega(t+s) + 2\phi)) =$$

$$= \frac{1}{2}(\sigma^2 + m^2) \cdot (cos(\omega(t-s)))$$

Отсюда

$$\mathbb{D}(\xi(t)) = \frac{1}{2} \cdot (\sigma^2 + m^2)$$

Таким образом, математическое ожидание процесса не меняется со временем, а ковариационная функция зависит от разности аргументов, т.е. мы имеем стационарный в широком смысле случайный процесс.

## Задача №3

Пусть $W(t)$ – стандартный винеровский процесс. Доказать, что он непрерывен в среднем квадратическом, но не является дифференцируемым в среднем квадратическом.

**Решение:**
$a(t) = \mathbb{E}(W(t)) \equiv 0$

$K(t, s) = \sigma^2 min(t, s)$, поэтому

1) $K(t, s)$ непрерывна в точке $(t_0, t_0) \Rightarrow W(t)$ непрерывна в среднем квадратическом

2) $\frac{\partial^2 K(t,s)}{\partial t \partial s} \nexists$ (достаточно рассмотреть односторонние производные по переменной $t$ в точке $(t, t)$, они будут равны 0 и 1, что говорит об отсутствии первой производной, а, следовательно, и второй), поэтому $W(t)$ не является дифференцируемым в среднем квадратическом

## Задача №4

$\xi(t)$ – пуассоновский процесс, $\eta(t) = \int_0^t \xi(s)ds$. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию для $\eta(t)$.

**Решение:**
Пуассоновский процесс $\{\xi(t), t \geq 0\}$ непрерывен в среднем квадратическом. Действительно,

$$\mathbb{E}|\xi(t+s) - \xi(t)|^2 = \mathbb{E}|\xi(s)|^2 = \lambda^2 s^2 + \lambda s \to 0, s \to 0$$

Тогда для вычисления указанных величин воспользуемся свойствами интеграла Римана от случайных процессов, а также свойствами пуассоновского процесса о его математическом ожидании и о значении его ковариационной функции:

$$\mathbb{E}(\eta(t)) = \int_0^t \mathbb{E}(\xi(s))ds = \int_0^t \lambda s ds = \frac{\lambda t^2}{2};$$

$$cov(\eta(t),\eta(s)) = \int_0^t\int_0^s K(u,v)dudv = \int_0^t\int_0^s \lambda min(u,v)dudv =$$

$$= \int_0^t \left[\int_0^v \lambda min(u,v)du + \int_v^s \lambda min(u,v)du\right]dv = \int_0^t \left[\int_0^v \lambda udu + \int_v^s \lambda vdu\right]dv =$$

$$= \int_0^t \left[\frac{\lambda v^2}{2} + \lambda v(s-v)\right]dv = \int_0^t \left[\lambda vs - \frac{\lambda v^2}{2}\right]dv = \frac{\lambda st^2}{2} - \frac{\lambda t^3}{6} = \frac{\lambda t^2}{6}(3s-t);$$

$$\mathbb{D}(\eta(t)) = cov(\eta(t),\eta(t)) = \frac{\lambda t^3}{3}$$

## Задача №5

Пусть $W(t)$ - стандартный винеровский процесс. $\xi_1 = \int\limits_0^\pi cost\, dW(t)$, $\xi_2 = \int\limits_0^\pi sint\, dW(t)$. Найти $\mathbb{E}(\xi_1)$, $\mathbb{E}(\xi_2)$, $\mathbb{D}(\xi_1)$, $\mathbb{D}(\xi_2)$, $cov(\xi_1,\xi_2)$.

**Решение:**
Стандартный винеровский процесс порождает стандартный белый шум. В силу свойств стохастического интеграла для простых функций:

1. $\mathbb{E}(\xi_1) = \mathbb{E}(\xi_2) = 0;$
2. $\mathbb{D}(\xi_1) = \mathbb{E}(\xi_1^2) = \mathbb{E}(\int\limits_0^\pi cost\, dW(t))^2 = \int\limits_0^\pi cos^2 t\, dt = \frac{\pi}{2};$

   $\mathbb{D}(\xi_2) = \mathbb{E}(\xi_2^2) = \mathbb{E}(\int\limits_0^\pi sint\, dW(t))^2 = \int\limits_0^\pi sin^2 t\, dt = \frac{\pi}{2};$
3. $cov(\xi_1,\xi_2) = \mathbb{E}(\xi_1\cdot\xi_2) = \mathbb{E}(\int\limits_0^\pi sint\, cost\, dW(t)) = \int\limits_0^\pi sint\, cost\, dt = 0.$

## Задача №6

Корреляционная функция стационарного процесса равна $K(\tau) = exp(-\tau^2)$. Найти спектральную плотность $f(\lambda)$. Обратно, дана спектральная плотность $f(\lambda) = exp(-|\lambda|)$, найти $K(\tau)$.

**Решение:**

В силу формулы $f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-i\tau\lambda)K(\tau)d\tau$, $\lambda\in\mathbb{R}^1$

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-i\tau\lambda)K(\tau)d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-i\tau\lambda)\exp(-\tau^2)d\tau =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-i\frac{u}{\sqrt{2}}\lambda)\exp(\frac{-u^2}{2})\frac{1}{2\sqrt{\pi}}du =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} exp(-\frac{\lambda^2}{4})$$

Обратно, в силу формулы $K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\tau\lambda) f(\lambda) d\lambda$, $\tau \in \mathbb{R}^1$

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\tau\lambda)\exp(-|\lambda|)d\lambda = 2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} exp(i\tau\lambda) \cdot \frac{1}{2} \cdot exp(-|\lambda|)d\lambda = \frac{2}{1+\tau^2}$$

## Задача №7

Пусть $W(t)$ - стандартный винеровский процесс, $h(\tau) = \exp(-\tau), \tau > 0, \xi(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} h(t - s)W(s)ds$. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию для такого процесса. То же самое для процесса $\eta(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} h(t-s)dW(s)$.

**Решение:**

Заметим сразу, что значения обоих интегралов не изменятся, если верхний предел взять равным бесконечности. Вычисление всех моментов основывается на приведённых на лекциях свойствах интеграла Римана от случайного процесса и стохастического интеграла. В силу результата задачи №3 винеровский процесс непрерывен в среднем квадратическом, поэтому $[t_1 \leqslant t_2]$

$$\mathbb{E}(\xi(t)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}(h(t-s)W(s))ds = 0$$

$$cov(\xi(t_1), \xi(t_2)) = cov(\int\limits_{-\infty}^{t_1} h(t_1 - s_1)W(s_1)ds_1, \int\limits_{-\infty}^{t_2} h(t_2 - s_2)W(s_2)ds_2) =$$

$$= \exp(-(t_1+t_2))cov(\int\limits_{-\infty}^{t_1} \exp(s_1)W(s_1)ds_1, \int\limits_{-\infty}^{t_2} \exp(s_2)W(s_2)ds_2) =$$

$$= \exp(-(t_1+t_2)) \int\limits_{-\infty}^{t_1} \int\limits_{-\infty}^{t_2} \exp(s_1+s_2)K_W(s_1,s_2)ds_1 ds_2 =$$

$$= \exp(-(t_1+t_2)) \int\limits_{-\infty}^{t_1} \int\limits_{-\infty}^{t_2} \exp(s_1+s_2)\min(s_1,s_2)ds_1 ds_2 = t_1 - 1 - \frac{1}{2}e^{t_1-t_2}$$

$$\mathbb{D}(\xi(t)) = t - \frac{3}{2}$$

$$\mathbb{E}(\eta(t)) = 0$$

$$cov(\eta(t_1), \eta(t_2)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(t_1 - s)h(t_2 - s)ds = \frac{1}{2}e^{t_1-t_2}$$

$$\mathbb{D}(\eta(t)) = \frac{1}{2}$$

# Задача №8

Случайный процесс $\xi(t)$ удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$d\xi(t) = -\xi(t)dt + d\eta(t), t \geq 0.$$

Найти общий вид решения этого уравнения.

**Решение:**
Общее решение уравнения имеет вид:

$$\xi(t) = W(t,0) \cdot \xi(0) + \int_0^t W(t,s)d\eta(s),$$

где $W(t,s)$ есть фундаментальное решение:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}W(t,s) = -W(t,s), t > s; \\ W(s,s) = 1 \end{cases}$$

Решим уравнение для $W(t,s)$:

$$\frac{dW(t,s)}{dt} = -W(t,s)$$

$$\frac{dW(t,s)}{W(t,s)} = -dt$$

$$ln\left[W(t,s)\right] = -t + lnC$$

$$W(t,s) = Ce^{-t};$$

$$W(s,s) = Ce^{-s} = 1 \Rightarrow C = e^s \Rightarrow W(t,s) = e^{s-t}$$

Тогда общее решение стохастического дифференциального уравнения примет вид:

$$\xi(t) = e^{-t} \cdot \xi(0) + \int_0^t e^{s-t}d\eta(s)$$

# Задача №9

Стационарный случай процесс $\xi(t)$ имеет спектральную плоскость $f(\lambda) = exp(-|\lambda|)$. Доказать, что этот процесс является дифференцируемым в среднем квадратическом и найти корреляционную функцию для производной.

**Решение:**
Стационарный случайный процесс будет дифференцируемым в среднем квадратическом $\Leftrightarrow$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 f(\lambda)\, d\lambda < \infty$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 f(\lambda)\,d\lambda = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 exp(-|\lambda|)\,d\lambda = 2\int\limits_{0}^{\infty} \lambda^2 exp(-|\lambda|)\,d\lambda = 2\cdot 2 = 4 < \infty$$

Теперь воспользуемся приведённым на лекциях соотношением, связывающим спектральную плотность стационарного процесса и его линейного преобразования: $f_1(\lambda) = |\phi(\lambda)|^2 f(\lambda)$, где $\phi(\lambda)$ — спектральная характеристика линейного преобразования, которая в данном случае равна $i\lambda$. Итак, $f_1(\lambda) = \lambda^2 e^{-|\lambda|}$. Искомая корреляционная функция является преобразованием Фурье найденной спектральной плотности. Таким образом корреляционная функция:

$$K(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 e^{-|\lambda|} e^{i\tau\lambda}\,d\lambda = \frac{4(1-3\tau^2)}{(1+\tau^2)^3}$$

## Задача №10

Случайный процесс $\xi(t)$ имеет среднее $\mathbb{E}(\xi(t)) = a(t) = 0$ и корреляционную функцию $K_\xi(t,s) = cos(t-s)$. Найти корреляционную функцию для процесса $\eta(t) = \xi(t) + \xi'(t)$.

**Решение:**

$$K_\eta(t,s) = cov(\eta(t),\eta(s)) = cov(\xi(t),\xi(s)) + cov(\xi'(t),\xi(s)) +$$
$$+ cov(\xi(t),\xi'(s)) + cov(\xi'(t),\xi'(s))$$

Покажем, что $\xi(t)$ непрерывно дифф. :

1) $a(t) = 0$ – непр. дифф. $\forall t$
2) $\exists \frac{d^2 K_\xi(t,s)}{dtds} = cos(t-s)$ – непр. в т. $(t_0,t_0)$

$\Rightarrow \xi(t)$ – непр. дифф.

$\Rightarrow$ {По теореме}

$$cov(\xi'(t),\xi'(s)) = \frac{d^2 K_\xi(t,s)}{dtds} = cos(t-s)$$
$$cov(\xi'(t),\xi(s)) = \frac{dK_\xi(t,s)}{dt} = sin(s-t)$$
$$cov(\xi(t),\xi'(s)) = \frac{dK_\xi(t,s)}{ds} = sin(t-s)$$

$\Rightarrow K_\eta(t,s) = 2\cdot cos(t-s)$

## Задача №11

$W(t), t \geqslant 0$ - стандартный винеровский процесс. Образуем случайную последовательность по правилу:

$\xi_n = W(n) - W(n-1), n \geqslant 1.$

Доказать, что это стационарная в широком смысле случайная последовательность.

**Решение:**
Из определения стандартного винеровского процесса получаем, что

1) с.в. $\xi_n, n \geqslant 1$, - независимы,

2) с.в. $\xi_n, n \geqslant 1$, - имеют стандартное нормальное распределение, т.е. одинаково распределены.

Отсюда получаем, что $\mathbb{E}(\xi_n) = 0$. Далее, для $m = n$:

$cov(\xi_n, \xi_m) = \mathbb{D}(\xi_n) = 1,$

для $m \neq n$:
$cov(\xi_n, \xi_m) = 0.$

Таким образом, математическое ожидание процесса не меняется со временем, а ковариационная функция зависит от разности аргументов, т.е. мы имеем стационарный в широком смысле случайный процесс.

## Задача №12

Стационарная последовательность $\xi(n)$ имеет спектральную плотность $f(\lambda) = 10 + 6\cos(\lambda) = |3 + e^{-i\lambda}|^2$. По наблюдениям $\xi(n), n \leq 0$, найти оптимальный линейный прогноз на один шаг вперёд.

**Решение:** 1. $f_1(\lambda) = 3 + e^{-i\lambda}$

2. $h_1 f_1(\lambda) = e^{i\lambda} \cdot (3 + e^{-i\lambda}) = 3e^{i\lambda} + 1$

3. $h_1 \equiv 1, h_2 \equiv 3e^{i\lambda}$

4. $h_1(\lambda) \equiv 1, f_1(\lambda) = 3 + e^{-i\lambda}$

5. $g(\lambda) = \sum\limits_{n=-\infty}^{0} c_n e^{in\lambda}$

$$gf_1 = 3c_0 + (3c_{-1} + c_0)e^{-i\lambda} + \ldots \equiv 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3c_0 = 1 \\ 3c_{-1} + c_0 = 0 \\ 3c_{-2} + c_{-1} = 0 \\ \ldots \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_0 = \frac{1}{3} \\ c_{-1} = -\frac{1}{3^2} \\ c_{-2} = \frac{1}{3^3} \\ \ldots \end{cases}$$

Таким образом, получим прогноз:

$$\tilde{\xi} = \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{(-1)^{-n}}{3^{1-n}} \xi_n$$

Под символом $\infty$, конечно, не подразумевается бесконечность, так как на практике может быть только конечное число наблюдений. Имеется ввиду достаточно большое число.

## Задача №13

Найти наилучшую линейную оценку для с.в. $\nu$ в пространстве $L = \{a + b\xi\}$, где $\mathbb{E}(\xi) = \mathbb{E}(\nu) = 0$, $\mathbb{D}(\xi) = 1$, $cov(\xi,\, \nu) = 1$.

**Решение:**
В соответствие с леммой о перпендикуляре будем искать $\bar{\nu} \in L$, что

$$(\nu - \bar{\nu}, \xi_1) = 0,\, \forall \xi_1 \in L$$

Пусть $\bar{\nu} = \bar{a} + \bar{b}\xi, \xi_1 = a + b\xi$, тогда

$$(\nu - \bar{\nu}, \xi_1) = \mathbb{E}((\nu - \bar{\nu}) \cdot \xi_1) = \mathbb{E}((\nu - \bar{a} - \bar{b}\xi) \cdot (a + b\xi)) = \mathbb{E}(\nu a + b\nu\xi - \bar{a}a - \bar{a}b\xi - \bar{b}a\xi - \bar{b}b\xi^2) = \\ = b - \bar{a}a - \bar{b}b$$

Подставляя вместо $(a, b)$ поочерёдно $(1,\, 0)$, $(0,\, 1)$, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} -\bar{a} = 0 \\ 1 - \bar{b} = 0 \end{cases}$$

Значит $\bar{a} = 0, \bar{b} = 1$. Ответ $\nu = \xi$.

## Задача №14

Для $t \in [0, ln2]$ наблюдается случайный процесс со стохастическим дифференциалом $d\xi(t) = (\alpha_1 \exp(t) + \alpha_2 \exp(2t)) + d\eta_0(t)$. Выписать вид оптимальных оценок для $\alpha_1$ и $\alpha_2$.

**Решение:**
$d\xi(t) = \theta(t)dt + d\eta_0(t)$

$\theta(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \phi_k(t)$

Для $t \in [t_1, t_2], b_{jk} = \int_{t_1}^{t_2} \phi_j(t)\phi_k(t)dt$

$B = (b_{jk}), C = (c_{jk}) = B^{-1}$

$c_k(t) = \sum_{j=1}^{n} c_{kj}\phi_j(t) \Rightarrow \phi_1(t) = \exp(t),\, \phi_2(t) = \exp(2t)$
$t_1 = 0, t_2 = ln2$

Тогда
$b_{11} = \int_0^{ln2} \exp(t)\exp(t)dt = \frac{3}{2}$
$b_{12} = b_{21} = \int_0^{ln2} \exp(t)\exp(2t)dt = \frac{7}{3}$
$b_{22} = \int_0^{ln2} \exp(2t)\exp(2t)dt = \frac{15}{4}$

Таким обоазом,

$$B = \begin{pmatrix} 3/2 & 7/3 \\ 7/3 & 15/4 \end{pmatrix}$$

Нетрудно вычислить, что

$$C = B^{-1} = \frac{72}{13}\begin{pmatrix} 15/4 & -7/3 \\ -7/3 & 3/2 \end{pmatrix}$$

И окончательно находим, что

$$c_1(t) = \frac{270}{13}\exp(t) - \frac{168}{13}\exp(2t)$$

$$c_2(t) = -\frac{168}{13}\exp(t) + \frac{108}{13}\exp(2t)$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{\alpha_1} = \int_0^{ln2} (\frac{270}{13}\exp(t) - \frac{168}{13}\exp(2t))dt$$

$$\hat{\alpha_2} = \int_0^{ln2} (-\frac{168}{13}\exp(t) + \frac{108}{13}\exp(2t))d\xi(t)$$

## Задача №15

При движении по некоторому лабиринту Вы в первый раз равновероятно сворачиваете либо налево, либо направо. Далее на каждой развилке Вы с вероятностью 0.7 сворачиваете туда же, что и в предыдущий раз, а с вероятностью 0.3 в противоположную сторону. Какова вероятность того, что вы свернете налево:
а) на третьей развилке,
б) на 1000-ой развилке?

**Решение:**
Мы имеем цепь Маркова с двумя состояниями, которые обозначим 1 и 2. По условию начальное распределение приписывает каждому из них вероятности, равные $\frac{1}{2}$. Далее, матрица перехода за один шаг имеет вид:

$$P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$$

Распределение цепи на третьей развилке, т.е. через два шага имеет вид

$$P^{(2)} = P^{(0)} \cdot P(2).$$

Вычисляем

$$P(2) = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.58 & 0.42 \\ 0.42 & 0.58 \end{pmatrix}.$$

Далее

$$P_1^{(2)} = P_1^{(0)} \cdot P_{11}(2) + P_2^{(0)} \cdot P_{21}(2) = 0.5 \cdot 0.58 + 0.5 \cdot 0.42 = 0.5.$$

Второй вопрос относится к поиску стационарного распределения. Для этого нам нужно решить следующую систему уравнений:

$$\pi_1 = \pi_1 \cdot 0.7 + \pi_2 \cdot 0.3,$$

$$\pi_2 = \pi_1 \cdot 0.3 + \pi_2 \cdot 0.7,$$

$$\pi_1 + \pi_2 = 1.$$

Решением этой системы является $\pi_1 = \pi_2 = 0.5$.

Ответ:
а) 0.5
б) 0.5

## Задача №16

Пусть цепь Маркова с непрерывным временем имеет два состояния и следующую матрицу интенсивностей перехода

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Используя уравнения Колмогорова, найти вероятности перехода $P_{ij}(t), t \geq 0$.

**Решение:**
Мы имеем цепь Маркова с непрерывным временем и конечным числом состояний. Такая цепь всегда регулярна. Для неё справедливы как первая, так и вторая системы уравнений Колмогорова. Зафиксируем конечное состояние $j = 1$ и рассмотрим обратную систему уравнений Колмогорова:

$$\begin{cases} \dfrac{dP_{11}(t)}{dt} = -1 \cdot P_{11}(t) + 1 \cdot P_{21}(t) \\ \\ \dfrac{dP_{21}(t)}{dt} = 2 \cdot P_{11}(t) - 2 \cdot P_{21}(t) \end{cases}$$

и дополним её начальными условиями:

$$P_{11}(0) = 1, P_{21}(0) = 0.$$

Заметим, что ввиду свойства непрерывности справа:

$$P_{12}(0) = 0, P_{22}(0) = 1.$$

Это линейная система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. В матричном виде это уравнение имеет вид:

$$\frac{dP(t)}{dt} = A \cdot P(t).$$

Его решение можно записать в виде:

$$P(t) = e^{A \cdot t} \cdot P(0) = \begin{pmatrix} \frac{e^{-3t}}{3} + \frac{2}{3} & \frac{1}{3} - \frac{e^{-3t}}{3} \\ \frac{2}{3} - \frac{2e^{-3t}}{3} & \frac{2e^{-3t}}{3} + \frac{1}{3}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{e^{-3t}}{3} + \frac{2}{3} & \frac{1}{3} - \frac{e^{-3t}}{3} \\ \frac{2}{3} - \frac{2e^{-3t}}{3} & \frac{2e^{-3t}}{3} + \frac{1}{3}) \end{pmatrix}$$

**P.S**. Удачи на зачёте!